1 التركيز

الهدف إيجاد العلاقات بين قياسات الزوايا الداخلية للمثلث.

المواد

- منقلة
- مقص

نصيحة للتدريس

وجه الطلاب لتسمية الزاوية المنفرجة *B* عندما يبدؤون العمل لأول مرة عبر **النشاط 1**. عليهم أيضًا تكرار **النشاط 1** مستخدمين المثلثات ذات الزوايا الحادة، والقائمة، والمثلث متساوي الأضلاع لتأكيد المفاهيم أكثر .

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

نظم الطلاب في مجموعات من 3 أو 4، متنوعة القدرات. ثم اطلب منهم إكمال النشاط 1 وتحليل النتيجتين 1 و 2.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما الشيء العام المشترك بين كل المثلثات؟ جميع المثلثات بها ثلاثة أضلاع وثلاثة رؤوس.
- عندما تحول مثلثًا من حاد الزاوية إلى منفرج الزاوية، كيف يؤثر ذلك على قياس الزوايا الأخرى؟ سيقل قياس الزوايا الأخرى
- عندما تتغير قياس الزوايا، ما الشيء الذي يظل ثابتًا؟ مجموع قياس الزوايا

تدريب اطلب من الطلاب إكمال النشاط 2 ومثّل وحلّل النتائج 5-3.

الاستكشاف 12-2 مختبر الهندسة

زوايا المثلثات

في هذا النشاط العملي، ستجد علاقات خاصة بين زوايا المثلث.

تم تصميم إنشاءات هندسية للأشكال باستخدام مختلف الأدوات، كالفرجار والمسطرة والخيط والأدوات العاكسة والورق القابل للطي وبرامج هندسي ديناميكي وما إلى ذلك.

النشاط 1 الزوايا الداخلية لمثلث

الخطوة 1

ارسم عدة مثلثات مختلفة وقصها. واكتب على الرؤوس *A* و *B* و *C*.

الخطوة 2

مع كل مثلث، قم بطي الرأس *B* لأسفل بحيث يتوازى خط الطي مع $\overline{AC}$. أعد تسمية الرأس باسم *B*.

الخطوة 3

ثم قم بطي الرأسين *A* و *C* بحيث يقابلان الرأس *B*. أعد تسمية الرأسين باسم *A* و *C*.

تحليل النتائج

1. الزوايا *A* و *B* و *C* تُسمى الزوايا الداخلية للمثلث *ABC*. ما نوع الشكل التي تشكله هذه الزوايا عند ضمها معًا في الخطوة 3؟
زاوية مستقيمة أو خط مستقيم
2. **التخمين** مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمثلث.
يبلغ مجموع قياسات زوايا أي مثلث 180 درجة.

النشاط 2 الزوايا الخارجية لمثلث

الخطوة 1

افتح كل مثلث ناتج عن النشاط 1 وضع كلًا منها على قطعة ورق منفصلة. وقم بمد $\overline{AC}$ كما هو موضح.

الخطوة 2

من كل مثلث، اقطع الزاويتين $\angle A$ و $\angle B$.

الخطوة 3

قم بترتيب $\angle A$ و $\angle B$ بحيث تملآن الزاوية المجاورة للزاوية $\angle C$ كما هو موضح.

تمثيل النتائج وتحليلها

3. الزاوية المجاورة لـ $\angle C$ تُسمى زاوية خارجية للمثلث *ABC*. **خمّن** العلاقة بين $\angle A$ و $\angle B$ والزاوية الخارجية عند *C*. $m\angle A + m\angle B$ هو قياس الزاوية الخارجية عند *C*.
4. كرر الخطوات في النشاط 2 مع الزاويتين الخارجيتين $\angle A$ و $\angle B$ في كل مثلث. راجع عمل الطلاب.
5. **قم بتخمين** قياس زاوية خارجية ومجموع قياسات الزوايا الداخلية غير المجاورة لها. انظر الهامش.

3 التقويم

التقويم التكويني

في التمارين 5-1، يحدد الطلاب قياسات زوايا المثلثات المستخدمة في هذا النشاط، ويوجدون العلاقات، ويضعون الفروض التي تقودهم إلى نظرية مجموع الزوايا ونظرية قياس الزاوية الخارجية.

من العملي إلى النظري

يستطيع الطلاب عمل المزيد من الاستكشافات والافتراضات عن العلاقات بين قياسات أضلاع وزوايا المثلث الصغير الناشئ عندما يتم طي الرأس *B* في النشاط 1. يجب أن يفهم الطلاب أنه على الرغم من اختلاف أطوال الأضلاع، فإن قياسات الزوايا متطابقة.

إجابة إضافية

5. قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسات الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

الدرس 12-2 زوايا المثلثات

السابق

- لقد صنفت المثلثات حسب أطوال أضلاعها أو قياسات زواياها.

الحالي

1. تطبيق نظرية مجموع زوايا المثلث.
2. تطبيق نظرية الزاوية الخارجية.

لماذا؟

- يرعى معهد ماساتشوستس للتقنية (MIT) المسابقة السنوية للتصميم 2.007 التي يصمم فيها الطلاب إنسانًا آليًا ويصنعونه.

من بين اختبارات حركات الإنسان الآلي برمجته على التحرك في مسار مثلث. سيظل مجموع قياسات الزوايا المحورية التي يجب أن يدور الإنسان الآلي عبرها ثابتًا دائمًا.

المفردات الجديدة
خط مساعد
auxiliary line
زاوية خارجية
exterior angle
زوايا داخلية غير مجاورة
remote interior angles
البرهان التسلسلي
flow proof
نتيجة
corollary

فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

1 نظرية مجموع زوايا المثلث

تحدد نظرية مجموع زوايا المثلث العلاقة بين قياسات الزوايا الداخلية في أي مثلث.

النظرية 12.1 نظرية مجموع زوايا المثلث

الشرح يبلغ مجموع قياسات زوايا المثلث 180.

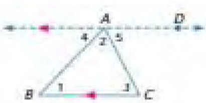
مثال $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

تتطلب برهنة نظرية مجموع زوايا المثلث استخدام خط مساعد. **الخط المساعد** خط إضافي أو قطعة إضافية مرسومة في شكل للمساعدة في تحليل العلاقات الهندسية. كما يحدث مع أي عبارة في برهان، يجب عليك أن تعلل أي خواص لخط مساعد رسمته.

البرهان نظرية مجموع زوايا المثلث

المعطيات. $\triangle ABC$

المطلوب. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$



البرهان.

العبارات	المبررات
1. $\triangle ABC$	1. المعطيات
2. ارسم $\overleftrightarrow{AD}$ عبر A بحيث يكون موازيًا لـ $\overline{BC}$	2. مسلمة التوازي
3. $\angle 4$ و $\angle BAD$ تشكلان زوجًا خطيًا.	3. تعريف الزوج الخطي
4. $\angle 4$ و $\angle BAD$ متكاملتان.	4. إذا كان 2 ∠ تشكلان زوجًا خطيًا، فهما متكاملتان.
5. $m\angle 4 + m\angle BAD = 180$	5. تعريف نظرية التكامل ∠
6. $m\angle BAD = m\angle 2 + m\angle 5$	6. مسلّمة جمع الزوايا
7. $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180$	7. التعويض
8. $\angle 4 \cong \angle 1, \angle 5 \cong \angle 3$	8. نظرية ∠ الداخلية المتبادلة
9. $m\angle 4 = m\angle 1, m\angle 5 = m\angle 3$	9. تعريف ∠ ≅
10. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$	10. التعويض

1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-2 تصنيف المثلثات حسب أطوال الأضلاع وقياس الزوايا.

الدرس 12-2 تطبيق نظرية مجموع زوايا المثلث و نظرية الزاوية الخارجية.

بعد الدرس 12-2 استخدام تحويلات التطابق لتخمين وتبرير خواص الأشكال الهندسية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

اطلب من الطلاب قراءة القسم **لماذا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح الأسئلة التالية:

- ما القياس، بخلاف الزاوية المحورية، الذي يجب برمجته لكي يتمكن الروبوت من التحرك في مسار مثلث الشكل؟ المسافة التي سيقطعها الروبوت قبل الدوران حول المحور.
- جميع الزوايا المحورية المبينة في الصورة زوايا حادة. فهل يجب أن تكون كل زاوية محورية حادة؟ لا، فالزاوية المحورية يمكن أن تكون قائمة أو منفرجة.
- تنص الطريقة على أن مجموع قياسات الزوايا المحورية يجب أن يكون نفس المجموع. فما المجموع؟ 180؛ مجموع قياس الزوايا الداخلية للمثلث هو 180 دائمًا.

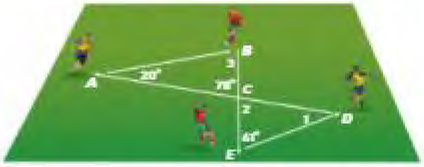
يمكن استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لتحديد قياس الزاوية الثالثة لمثلث عند معرفة قياسي الزاويتين الأخريين.

الربط بالحياة اليومية

تتضمن تدريب التمرير والتحرك في كرة القدم عدة جوانب أساسية للتمرير. تأمل كل التمريرات في هذا التدريب شكل مثلث، وهو أساس كل حركات الكرة. كما أن اللاعبين ملزمون بالتحرك بمجرد تمرير الكرة.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام نظرية مجموع زوايا المثلث

كرة القدم **يوضح الرسم التخطيطي مسار الكرة في تدريبٍ على التمرير لأربعة أصدقاء. أوجد قياس كل زاوية مرقَّمة.**



الفهم افحص المعلومات المذكورة في الرسم التخطيطي. أنت تعرف قياسي زاويتين في مثلث واحد وقياس زاوية واحدة فقط في مثلث آخر. أنت تعرف أيضًا أن $\angle ACB$ و $\angle 2$ زاويتان رأسيتان.

التخطيط أوجد $m\angle 3$ باستخدام نظرية مجموع زوايا المثلث لأن قياسي زاويتي $\angle ABC$ معلوم. استخدم نظرية الزوايا الرأسية لإيجاد $m\angle 2$. ثم ستكون لديك معلومات كافية لإيجاد قياس $\angle 1$ في $\triangle CDE$.

الحل

$m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 3 + 20 + 78 = 180$ تعويض

$m\angle 3 + 98 = 180$ بسِّط.

$m\angle 3 = 82$ اطرح 98 من كل طرف.

$\angle ACB$ و $\angle 2$ زاويتان رأسيتان متطابقتان. إذًا $m\angle 2 = 78$.

استخدم $m\angle 2$ و $\angle CED$ في $\triangle CDE$ لإيجاد قيمة $m\angle 1$.

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 180$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 1 + 78 + 61 = 180$ تعويض

$m\angle 1 + 139 = 180$ بسِّط.

$m\angle 1 = 41$ اطرح 139 من كل طرف.

التحقق ينبغي أن يبلغ مجموع قياسات زوايا $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ 180.

$\triangle ABC$: $m\angle 3 + m\angle BAC + m\angle ACB = 82 + 20 + 78 = 180$ ✓

$\triangle CDE$: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle CED = 41 + 78 + 61 = 180$ ✓

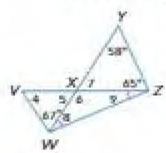
تمرين موجَّه

أوجد قياسات جميع الزوايا المرقَّمة.

1A.

$m\angle 1 = 123,\ m\angle 2 = 52,\ m\angle 3 = 29$

1B.



1B. $m\angle 4 = 56,\ m\angle 5 = 57,\ m\angle 6 = 123,$
$m\angle 7 = 57,\ m\angle 8 = m\angle 9 = 28.5$

تصيحة في حل المسائل

الاستنتاج المنطقي غالبًا ما يمكن حل المسائل المعقدة بسهولة أكبر إذا حللتها أولاً إلى أجزاء أسهل في التعامل معها. في المثال 1، قبل أن تتمكن من إيجاد قيمة $m\angle 1$، يجب أولاً أن تجد قيمة $m\angle 2$.

1 نظرية مجموع زوايا المثلث

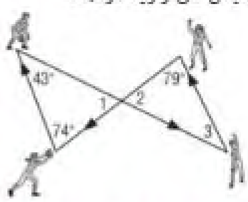
المثال 1 يوضح طريقة حساب قياس الزاوية المجهولة باستخدام النظريات التي سبق تعلمها ونظرية مجموع زوايا المثلث.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 **كرة البيسبول** يوضح الرسم التخطيطي مسار الكرة في تدريبٍ لأربعة لاعبين. أوجد قياس كل زاوية مرقَّمة.



$m\angle 1 = 63,\ m\angle 2 = 63,$
$m\angle 3 = 38$

التركيز على محتوى الرياضيات

المعرفة السابقة في الوحدة 11، استخدم الطلاب العلاقات بين الزوايا لإيجاد قياس الزوايا. وفي هذا الدرس سيطبق الطلاب معرفتهم بالزوايا الرأسية، والزاويتان المتكاملتان، والزاويتان المتتامتان، إلى جانب نظرية مجموع زوايا المثلث ونظرية الزاوية الخارجية لإيجاد قياس الزاوية المجهولة.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

جهاز العرض المتصل بالحاسوب استخدم برنامجًا من البرامج الهندسية لترسم عدة مثلثات. ثم أنشئ زوايا المثلثات. رتّب الزوايا معًا لتوضيح العلاقات بينها.

إرشاد للمعلمين الجدد

الزوايا الخارجية اطلب من طلابك أن يكتشفوا النظرية 12.2 بإعطائهم أمثلة متعددة بها الزوايا الداخلية غير المتجاورة معروفة القيمة. واطلب منهم إيجاد قياس الزاوية الخارجية.

2 نظرية الزوايا الخارجية

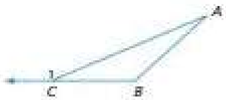
بالإضافة إلى الزوايا الداخلية الثلاث في المثلث يمكن أن تشكل **زاوية خارجية** من أحد أضلاع المثلث وامتداد الضلع المجاور. يوجد لكل زاوية خارجية في المثلث **زاويتان داخليتان غير مجاورتين** أي أنهما لا تجاوران الزاوية الخارجية.

$\angle 4$ هي زاوية خارجية للمثلث $\triangle ABC$. وزاويتاها الداخليتان غير المجاورتين هما $\angle 1$ و $\angle 3$.

النظرية 12.2 نظرية الزوايا الخارجية

قياس الزاوية الخارجية في مثلث يساوي مجموع قياسات الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين.

مثال $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



قراءة في الرياضيات

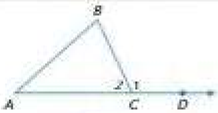
برهان المخطط التسلسلي يُسمى البرهان التسلسلي أيضًا برهان المخطط التسلسلي.

يستخدم **البرهان التسلسلي** عبارات مكتوبة بمربعات وأسهم لإظهار التسلسل المنطقي للفرضية. السبب المبرر لكل عبارة مكتوب تحت المربع. يمكنك استخدام البرهان التسلسلي في إثبات نظرية الزوايا الخارجية.

البرهان نظرية الزوايا الخارجية

المعطيات: $\triangle ABC$

المطلوب: $m\angle A + m\angle B = m\angle 1$



البرهان التسلسلي:

$\triangle ABC$
المعطيات

$\angle 2$ و $\angle 1$ تشكلان زوجًا خطيًا.
تعريف الزوج الخطي

$\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتان متكاملتان.
إذا شكّل $\angle 2$ زوجًا خطيًا فإنهما متكاملتان.

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = 180$
نظرية مجموع زوايا المثلث

$m\angle 2 + m\angle 1 = 180$
تحديد الزوايا المتكاملة

$m\angle A + m\angle B + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 1$
التعويض

$m\angle A + m\angle B = m\angle 1$
خاصية الطرح في المعادلة

نصيحة دراسية

البراهين التسلسلية يمكن كتابة البراهين التسلسلية رأسيًا أو أفقيًا.

يمكن أيضًا استخدام نظرية الزوايا الخارجية في إيجاد القياسات الناقصة.

التدريس المتمايز AL OL

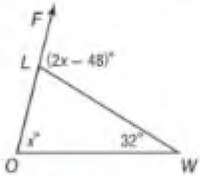
المتعلمون أصحاب النمط البصري/المكاني أخبر طلابك أنّ كُلًا من نظرية مجموع زوايا المثلث ونظرية الزوايا الخارجية قائم على الفكرة التي تقول إنّ قياس الزاوية المستقيمة يساوي °180. ووضح لهم أنّهم لو قاموا بتقطيع زوايا أيّ مثلثٍ ووضعوها بجوار بعضها، لحصلوا على خطٍ مستقيم. وهذا يوضح بصريًا السبب في أن مجموع قياس الزوايا الداخلية للمثلث يساوي 180 درجة.

2 نظرية الزاوية الخارجية

المثال 2 يوضح طريقة حساب قياس الزاوية المجهولة باستخدام النظريات التي سبق تعلمها ونظرية الزاوية الخارجية.
المثال 3 يستخدم نتيجة لإيجاد قياس زاوية.

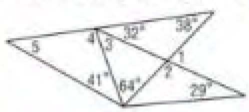
أمثلة إضافية

2 علم البستنة أوجد قياس $\angle FLW$ في حديقة الأزهار المُسوَّرة المُبيَّنة أمامك.



$m\angle FLW = 112$

3 أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.



$m\angle 1 = 70$ و $m\angle 2 = 110$
و $m\angle 3 = 46$ و $m\angle 4 = 102$
و $m\angle 5 = 37$

إرشاد للمعلمين الجدد

الزوايا المُرقَّمة قد لا تستطيع إيجاد قياس بعض الزوايا المرقمة بنفس ترتيب ترقيمها. شجّع طلابك لإيجاد قياس الزاوية المجهولة بترتيب منطقيّ ومساعد لهم.

انتبه!

نظرية مجموع زوايا المثلث
عند إيجاد القياسات المجهولة لمثلث ما، تحقق من صحة الحل عن طريق التأكد من أن مجموع قياس زوايا المثلث يساوي 180.

مثال 2 من الحياة اليومية استخدام نظرية الزوايا الخارجية

اللياقة أوجد قياس $\angle JKL$ في الوضعية المعروضة التي على شكل مثلث.

نظرية الزوايا الخارجية	$m\angle KLM + m\angle LMK = m\angle JKL$
تعويض	$x + 50 = 2x - 15$
بطرح x من كل طرف.	$50 = x - 15$
بجمع 15 إلى كل طرف.	$65 = x$

إذًا $m\angle JKL = 2(65) - 15$ أو 115.

تمرين موجَّه

2. ترتيب الخزانة تثبت بثبتة ذراع الرف الظاهر في جدار خزانتها. ما قياس $\angle 1$، وهي الزاوية التي يشكلها الذراع مع الجدار؟ 130

مهنة من الحياة اليومية

المدرب الشخصي يعمل المدربون الشخصيون على توجيه الأفراد وتحفيزهم في نشاطات التمارين. يشرحون مدة تمارين ويساعدون العملاء على تحسين أساليب التدريب لديهم. ويجب أن يحصل المدربون الشخصيون على اعتماد في مجال اللياقة.

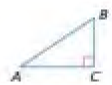
النتيجة نظرية لها برهان تأتي كنتيجة مباشرة لنظرية أخرى. كما هو الحال مع النظرية، يمكن استخدام النتيجة كسبب في برهان. تنتج اللوازم أدناه بشكل مباشر عن نظرية مجموع زوايا المثلث.

اللوازم نتائج مجموعة زوايا المثلث

12.1 الزاويتان الحادتان في المثلث القائم الزاوية هما زاويتان متتامتان.

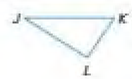
الاختصار: $\angle$ الحادة في $\triangle$ قائم متتامة.

مثال: إذا كانت $\angle C$ زاوية قائمة، فإن $\angle A$ و $\angle B$ متتامتان.



12.2 يمكن أن توجد زاوية واحدة قائمة أو منفرجة بحد أقصى في المثلث.

مثال: إذا كانت $\angle L$ زاوية قائمة أو منفرجة، فإن $\angle J$ و $\angle K$ يجب أن تكونا زاويتين حادتين.



ستبرهن النتيجتين 12.1 و 12.2 في التمرينين 34 و 35.

مثال 3 إيجاد قياسات الزوايا في المثلثات قائمة الزاوية

أوجد قياسات جميع الزوايا المرقمة.

$\angle$ الزوايا الحادة في $\triangle$ القائم متتامة.	$m\angle 1 + m\angle TYZ = 90$
التعويض	$m\angle 1 + 52 = 90$
اطرح 52 من كل طرف.	$m\angle 1 = 38$

تمرين موجَّه

3A. $\angle 2$ 52 **3B.** $\angle 3$ 38 **3C.** $\angle 4$ 52

نصيحة دراسية

التحقق من مدى صحة الحل عندما تعمل على إيجاد قياس زاوية أو أكثر في مثلث، تحقق دائمًا للتأكد من أن مجموع قياسات الزوايا يبلغ 180.

3 تدريب

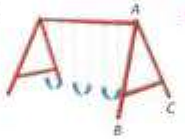
التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

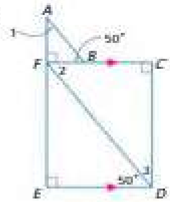
استخدم المخطط أسفل هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

التحقق من فهمك

مثال 1 أوجد قياسات جميع الزوايا المرقمة.

1. 

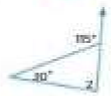
$m\angle 1 = 61°$

2. 

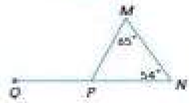
$m\angle 1 = 40°$; $m\angle 2 = 42°$; $m\angle 3 = 48°$

مثال 2 أوجد قياس كل مما يلي.

3. $m\angle 2$ $85°$



4. $m\angle MPQ$ 119



المقعد تشكل دعامة مقعد الاسترخاء هذا مثلثًا مع بقية هيكل المقعد كما هو ظاهر. إذا علمت أن $m\angle 1 = 105$ و $m\angle 3 = 48$، فأوجد كل قياس.

5. $m\angle 4$ $57°$
6. $m\angle 6$ $132°$
7. $m\angle 2$ $75°$
8. $m\angle 5$ 123

مثال 3 **الانتظام** أوجد قياس كل مما يلي.

9. $m\angle 1$ $58°$
10. $m\angle 3$ $20°$
11. $m\angle 2$ $148°$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.

12. 

$m\angle 1 = 60°$

13. 

$m\angle 1 = 20°$

14. 

14. $m\angle 1 = m\angle 2 = 39°$; $m\angle 3 = 137°$

15. 

15. $m\angle 1 = m\angle 2 = 55°$; $m\angle 3 = 107°$

خيارات الواجب المنزلي المتمايزة

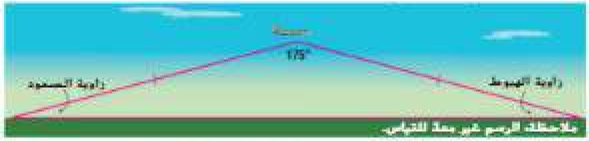
المستوى	الواجب	خيار اليومين	
AL مبتدئ	12-29, 46-48, 50-64	52-55 ، فردي 13-29	46-48, 50, 51, 56-64 ، زوجي 12-28
OL أساسي	12-37, 38-48, 50-64	12-29, 52-55	30-48, 50, 51, 56-64
BL متقدم	30-62		

إجابات إضافية

21. $x = 51$; $m\angle CAB = 102°$; $m\angle ABC = 41°$

22. $x = 29$; $m\angle J = 31°$; $m\angle K = 69°$

16. **الطائرات** يمكن تمثيل مسار طائرة باستخدام ضلعي مثلث كما هو ظاهر. المسافة التي تقطعها الطائرة أثناء الصعود تساوي المسافة التي تقطعها أثناء الهبوط.



a. ضع تصنيفًا للنموذج باستخدام أضلاعه وزواياه. **مثلث منفرج متساوي الساقين**

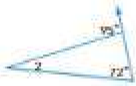
b. زاويتا الصعود والهبوط متطابقتان. أوجد قياسيهما. **الزاويتان $2\frac{1}{2}°$ أو $2.5°$**

مثال 2 **أوجد قياس كل مما يلي.**

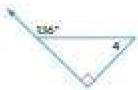
17. $m\angle 1$ **79°**

18. $m\angle 3$ **66°**

19. $m\angle 2$ **23°**



20. $m\angle 4$ **46°**



21. $m\angle ABC$ **انظر الهامش**

22. $m\angle JKL$ **انظر الهامش**

مثال 3 23. **منحدر الكرسي المتحرك** افترض أن منحدر الكرسي المتحرك الظاهر يشكل زاوية تبلغ 12° مع الأرض. فما قياس الزاوية التي يشكلها المنحدر مع باب السيارة؟ **60°**

الانتظام أوجد قياس كل مما يلي.

24. $m\angle 1$ **60°**
25. $m\angle 2$ **35°**
26. $m\angle 3$ **31°**
27. $m\angle 4$ **57°**
28. $m\angle 5$ **57°**
29. $m\angle 6$ **33°**

721

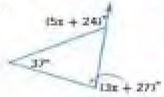
الجبر أوجد قيمة x، ثم أوجد قياس كل زاوية.

30\. 

$x = 30$. الزوايا هي $30°$ و$60°$ و$90°$.

31\. 

$x = 18$. الزاويتان هما $18°$ و$72°$.

32\. 

$x = 20$. الزاويتان هما $124°$ و$87°$.

33\. **البستنة** قرر أحد مهندسي المناظر الطبيعية ضم دعامة زراعية مثلثة الشكل إلى حديقة. الشكل هو مثلث متساوي الساقين زاويته **الرأسية** ربع زاوية **القاعدة**. ماذا ينبغي أن يكون قياس كل زاوية؟
كل زاوية قاعدة $80°$ والزاوية الرأسية $20°$.

البرهان اكتب النوع المحدد من البراهين. **34-35. انظر الهامش.**

34\. البرهان التسلسلي للنتيجة 12.1

35\. فقرة برهان للنتيجة 12.2

الانتظام أوجد قياس جميع الزوايا المرقمة.

36\. 

$m\angle 1 = m\angle 3 = 62°$; $m\angle 2 = 85°$; $m\angle 4 = 5°$

37\. 

$m\angle 1 = 62.5°$; $m\angle 2 = 20°$; $m\angle 3 = 97.5°$; $m\angle 4 = 40°$; $m\angle 5 = 105°$; $m\angle 6 = 42.5°$; $m\angle 7 = 75°$; $m\angle 8 = 62.5°$

38\. **الجبر** صنّف المثلث الموضح حسب زواياه. اشرح تبريرك.

38. الزوايا هي $29°$ و$48°$ و$103°$. هذا مثلث منفرج الزاوية.

39\. **الجبر** يقل قياس الزاوية الحادة الأكبر في المثلث القائم الزاوية بمقدار 12 درجة عن ناتج ضرب أربعة في قياس الزاوية الحادة الأصغر. أوجد قياس كل زاوية. **الزاويتان هما $21°$ و$69°$.**

40\. حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة.
إذا كانت خاطئة فقدم مثالاً مضاداً. وإذا كانت صحيحة، فاذكر فرضية تدعم استنتاجك. **انظر الهامش.**

إذا كان مجموع زاويتين حادتين في مثلث أكبر من 90، فالمثلث حاد الزاوية.

41\. **الجبر** في $\triangle XYZ$، $m\angle X = 152$ و $m\angle Z = z$ و $m\angle Y = y$. اكتب متباينة لوصف القياسات المحتملة للزاوية $\angle Z$. اشرح تبريرك. **انظر الهامش.**

42\. **السيارات** راجع الصورة الموجودة على اليسار.

a. أوجد $m\angle 1$ و $m\angle 2$. **$m\angle 1 = 135°$; $m\angle 2 = 45°$**

b. إذا كان داعم الغطاء أطول من الداعم المعروض، فما التغير الذي سيحدث في $m\angle 1$؟ اشرح. **انظر الهامش.**

c. إذا كان داعم الغطاء أطول من الداعم المعروض، فما التغير الذي سيحدث في $m\angle 2$؟ اشرح. **انظر الهامش.**

التدريس المتمايز OL BL

التوسع اطلب من الطلاب اختيار رأس زاوية في شكل سداسي واطلب منهم رسم خطوط مستقيمة داخلية من هذا الرأس إلى رؤوس أخرى ليس لها خطوط مستقيمة موجودة بالفعل. اسألهم عن عدد المثلثات الناتجة. كم عدد المثلثات الناتجة عن استخدام شكل سباعي؟ اكتب المعادلة الجبرية التي تصلح مع n أضلاع و t مثلثات.
$4; 5; t = n - 2$

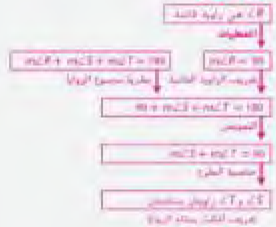
إجابات إضافية

34. المعطيات: $\triangle RST$

$\angle R$ زاوية قائمة.

المطلوب: $\angle S$ و $\angle T$ زاويتان متتامتان.

البرهان:



35. المعطيات: $\triangle MNO$

$\angle M$ زاوية قائمة.

المطلوب: يمكن أن توجد زاوية واحدة قائمة بحد أقصى في المثلث.

البرهان: في $\triangle MNO$، M زاوية قائمة. $m\angle M + m\angle N + m\angle O = 180$. إذا كانت $m\angle M = 90$، $m\angle N + \angle O = 90$. N زاوية قائمة، إذًا $m\angle O = 0$. ولكنّ هذا مستحيلٌ. وإذًا لا يمكن للمثلث أن يوجد به زاويتان قائمتان.

المعطيات: $\triangle PQR$

$\angle P$ زاوية منفرجة.

المطلوب: يمكن أن يوجد زاوية واحدة منفرجة بحد أقصى في المثلث.

البرهان: في $\angle PQR$، $\angle P$ زاوية منفرجة. إذًا $m\angle P > 90$. $m\angle P + m\angle Q + m\angle R = 180$. إذًا لا بد أن $m\angle Q + m\angle R < 90$. إذًا $\angle Q$ و $\angle R$ لا بد أن يكون كل منهما زاوية حادة.

40. هذه عبارة خاطئة. والمثلث يجب أن يكون مثلثًا منفرج الزاوية.

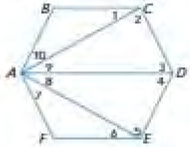
41. $z < 28$؛ الإجابة النموذجية: بما أن مجموع قياس زوايا المثلث يساوي 180 و $m\angle X = 152$، $152 + m\angle Y + m\angle Z = 180$. إذًا $m\angle Y + m\angle Z = 28$. إذا كان $m\angle Y = 0$، إذًا $m\angle Z = 28$. لكن قياس الزاوية يجب أن يكون أكبر من 0. إذًا $m\angle Z$ لا بد وأن يكون أقل من 28. إذًا $z < 28$.

البرهان اكتب نوع البرهان المحدد.

43. برهان من عمودين **انظر الهامش.**

المعطيات: $ABCDEF$ شكل خماسي الأضلاع.

المطلوب: $m\angle B + m\angle BCD + m\angle CDE + m\angle DEF + m\angle F + m\angle FAB = 720$



44. برهان حرّ **انظر الهامش.**

المعطيات: الصورة على اليسار

المطلوب: $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 5 + m\angle 6$

45. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتعرف على مجموع قياسات الزوايا الخارجية في مثلث. **a–e انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

a. **هندسيًا** ارسم خمسة مثلثات مختلفة مع تمديد الأضلاع وتسمية الزوايا كما يظهر. احرص على إدراج مثلث منفرج الزاوية ومثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا واحدًا من كل نوع على الأقل.

b. **جدوليًا** قس الزوايا الخارجية في كل مثلث، وسجل قياسات كل مثلث ومجموع هذه القياسات في جدول.

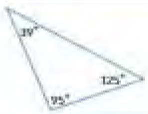
c. **لفظيًا** قم بتخمين مجموع الزوايا الخارجية في مثلث، واكتب تخمينك بكلمات.

d. **جبريًا** ضع صياغة جبرية للتخمين الذي كتبته في الجزء c.

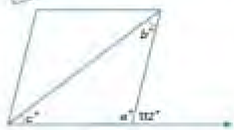
e. **تحليليًا** اكتب برهانًا حرًا لتخمينك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

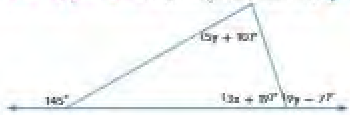
46. **تحليل الخطأ** قاس بدر زوايا المثلث وأسماها كما هو ظاهر. ويقول بلال إن قياسًا واحدًا على الأقل غير صحيح. اشرح بطريقتين مختلفتين على الأقل كيف عرف بلال ذلك. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



47. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف ستتوصل إلى القياسات الناقصة في الشكل الظاهر. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



48. **تحدٍ** أوجد قيم x و y في الشكل أدناه. $x = 17, y = 13$



49. **التبرير** إذا كانت الزاوية الخارجية المجاورة للزاوية $\angle A$ زاوية منفرجة، فهل $\triangle ABC$ حاد الزاوية أم قائم الزاوية أم منفرج الزاوية أم لا يمكن تحديد تصنيفه؟ اشرح تبريرك. **لا يمكن تحديد التصنيف.**

50. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن المثلث لا يمكن أن يحتوي على زوايا داخلية منفرجة وحادة وقائمة. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

التمثيلات المتعددة

في التمرين 45، يستكشف الطلاب مجموع قياس الزوايا الخارجية للمثلث مستخدمين الرسومات الهندسية، ومنضدة، ووصفًا لفظيًا، وإثبات حرّ.

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 46، يستطيع بلال أن يبرّر ادعاءه بتوضيح أنّ مجموع الزوايا الداخلية للمثلث يساوي $37 + 93 + 130 = 260$، وهذا لا يمكن أن يكون صحيحًا لأن مجموع الزوايا الداخلية للمثلث يساوي 180. كما أنّ المثلث لا يمكن أن يوجد به أكثر من زاوية منفرجة واحدة، ولذلك، لا يمكن أنْ يوجدَ بالمثلث زاويتان يصل قياسهما إلى 93° و 103°.

إجابات إضافية

42b. الإجابة النموذجية: قياس $\angle 1$ سيصبح أصغر لو كانت الدعامة أطول لأنّ الغطاء سيكون أبعد من ساق المثلث الموجودة على طول ممتص صدمات السيارة.

42c. الإجابة النموذجية: قياس $\angle 2$ ستصبح أكبر إذا كانت الدعامة أطول لأن $\angle 1$ ستصبح أصغر وهما عبارة عن زوج خطي.

43. البرهان: العبارات (المبررات)

1. $ABCDEF$ شكل خماسي الأضلاع. (معطيات)
2. $m\angle B + m\angle 1 + m\angle 10 = 180$
$m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 9 = 180$
$m\angle 8 + m\angle 4 + m\angle 5 = 180$
$m\angle F + m\angle 6 + m\angle 7 = 180$
(نظرية مجموع زوايا المثلث)
3. $m\angle B + m\angle 1 + m\angle 10 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 9 + m\angle 8 + m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle F + m\angle 6 + m\angle 7 = 720$ (خاصية الجمع)
4. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle BCD$
$m\angle 3 + m\angle 4 = m\angle CDE$
$m\angle 5 + m\angle 6 = m\angle DEF$
$m\angle 7 + m\angle 8 + m\angle 9 + m\angle 10 = m\angle FAB$ (جمع الزوايا)
5. $m\angle B + m\angle BCD + m\angle CDE + m\angle DEF + m\angle F + m\angle FAB = 720$ (التعويض)

إرشاد للمعلمين الجدد

قياس الزوايا ذكّر الطلاب بأنه عند قياس الزوايا، يجب عليهم أولاً على أن يضعوا الزاوية 0 على جانبي المنقلة جانب الزاوية. إذا كانت الزاوية 0 على المقياس الخارجي، فسوف يحتاجون إلى قراءة العدد الموجود على المقياس الخارجي حيث يتقاطع الجانب الآخر من الزاوية مع المنقلة.

44. طبقًا لنظرية مجموع زوايا المثلث $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$ و $m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 180$. تكون هاتان الزاويتان مساويتين لبعضهما البعض $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6$. ونظرًا لتطابق الزوايا الرأسية، $\angle 4 \cong \angle 3$. طبقًا لتعريف الزوايا المتطابقة، $m\angle 3 = m\angle 4$. باستخدام خاصية الطرح، $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 5 + m\angle 6$.

تدريب على الاختبار المعياري

51. **الاحتمال** يملك السيد جاسم متجر فيديو ويريد إجراء استبيان لعملائه للتوصل إلى نوع الأفلام التي ينبغي أن يشتريها. أي من العبارات التالية سيمثل الطريقة الأفضل لكي يحصل السيد جاسم على نتائج دقيقة للاستبيان؟ **D**

A إجراء استبيان للعملاء الذين يأتون من الساعة 9 مساءً إلى الساعة 10 مساءً

B إجراء استبيان للعملاء الذين يأتون في الإجازة الأسبوعية

C إجراء استبيان للعملاء الذكور

D إجراء استبيان في أوقات مختلفة من الأسبوع واليوم

52. **الإجابة القصيرة** يبلغ قياس زاويتين في مثلث $35°$ و $80°$. أوجد قيم قياسات الزوايا الخارجية للمثلث.
$100°, 115°, 145°$

53. **الجبر** ما المعادلة التي تعادل $7x - 3(2 - 5x) = 8x$؟ **G**

F $2x - 6 = 8$
G $22x - 6 = 8x$
H $-8x - 6 = 8x$
J $22x + 6 = 8x$

54. **SAT/ACT** يملك جمال 4 ألعاب فيديو أكثر من حارب ونصف ما يملكه حسام. إذا كان مجموع ما معهم يبلغ 24 لعبة فيديو، فكم عدد ما يملكه حسام؟ **E**

A 7
B 9
C 12
D 13
E 14

مراجعة شاملة

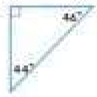
ضع تصنيفًا لكل مثلث باعتباره حاد الزاوية أو متساوي الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية.

55. 

متساوي الزوايا

56. 

منفرج الزاوية

57. 

قائم الزاوية

هندسة الإحداثيات **أوجد المسافة من P إلى ℓ.**

58. المستقيم ℓ يحتوي على النقطتين $(0, -2)$ و $(1, 3)$، والنقطة P لها إحداثيات $(-4, 4)$. **$\sqrt{26}$ وحدة**

59. المستقيم ℓ يحتوي على النقطتين $(-3, 0)$ و $(3, 0)$، والنقطة P لها إحداثيات $(4, 3)$. **3 وحدات**

مراجعة المهارات

اذكر الخاصية التي تمثل كل عبارة.

60. إذا كانت $\frac{x}{2} = 7$، إذًا $x = 14$. **خاصية الضرب**

61. إذا كانت $x = 5$ و $b = 5$، إذًا $x = b$. **خاصية التعويض**

62. إذا كانت $XY - AB = WZ - AB$، إذًا $XY = WZ$. **خاصية الجمع**

63. إذا كانت $m\angle A = m\angle B$ و $m\angle A = m\angle C$، و $m\angle B = m\angle C$. **خاصية التعدي**

64. إذا كانت $m\angle 1 + m\angle 2 = 90$ و $m\angle 2 = m\angle 3$، إذًا $m\angle 1 + m\angle 3 = 90$. **خاصية التعويض**

4 التقويم

عيّن مصطلح الرياضيات ارسم مثلثًا حادًا بزوايا قياسها 44 و 56. ارسم مثلثًا منفرجًا بزوايا قياسها 110 و 40 درجة. ارسم مثلثًا متساوي الساقين بزاويتين قياس كلٍّ منهما 75 درجة. على الطلاب استخدام النظريات في هذا الدرس لإيجاد قياس الزوايا المجهولة في كل مثلث ثم كتابة إجاباتهم.

724 | الدرس 12-2 | زوايا المثلثات